CADERNO DE RESOLUÇÕES CONCURSO IME 2010 MATEMÁTICA

27/OUT/2009

MATEMÁTICA

01. Sejam os conjuntos P_1, P_2, S_1 e S_2 tais que $(P_2 \cap S_1) \subset P_1$, $(P_1 \cap S_2) \subset P_2$ e $(S_1 \cap S_2) \subset (P_1 \cup P_2)$.
Demonstre que $(S_1 \cap S_2) \subset (P_1 \cap P_2)$.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO 01:

Dadas as hipóteses:

I – $(P_2 \cap S_1) \subset P_1$

II - $(P_1 \cap S_2) \subset P_2$

III - $(S_1 \cap S_2) \subset (P_1 \cup P_2)$

Partindo de III:

Se $x \in (S_1 \cap S_2)$, então $x \in S_1$ **e** $x \in S_2$. Como $(S_1 \cap S_2) \subset (P_1 \cup P_2)$, então neste caso, $x \in P_1$ **ou** $x \in P_2$, daí dois casos:

a. Se $x \in P_1$, então $x \in P_2$, pois de II tem-se que se $x \in P_1$ e $x \in S_2$, então $x \in P_2$.
b. Se $x \in P_2$, então $x \in P_1$, pois de I tem-se que se $x \in P_2$ e $x \in S_1$, então $x \in P_1$.

Logo se $x \in S_1$ **e** $x \in S_2$, necessariamente $x \in P_1$ **e** $x \in P_2$, daí se $x \in (S_1 \cap S_2)$, então $x \in (P_1 \cap P_2)$.

Como queríamos demonstrar.

02. Três dados iguais, honestos e com seis faces numeradas de um a seis são lançados simultaneamente. Determine a probabilidade de que a soma dos resultados de dois quaisquer deles ser igual ao resultado do terceiro dado.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO 02:

Considerando que o resultado dos dados são x, y e z. Para verificar x+y = z, temos 1≤x+y≤6 que são os possíveis resultados de z. Montando uma tabela com os possíveis valores de x+y, observamos que a probabilidade de x e y verificarem 1≤x+y≤6 é 15/36.

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	
2	3	4	5	6		
3	4	5	6			
4	5	6				
5	6					
6						

Definido o valor da soma, existe somente um valor de z que satisfaz x+y = z e a probabilidade de z ser igual a x+y é 1/6. Teríamos o mesmo número de possibilidades para x+z=y e y+z=x, o que equivale a multiplicar o resultado anterior por 3. Então

$$\boxed{P = \frac{15}{36} \cdot \frac{1}{6} \cdot 3 = \frac{5}{24}}$$

Solução alternativa:

Possíveis resultados: (1,1,2), (1,2,3), (1,3,4), (1,4,5), (1,5,6), (2,2,4), (2,3,5), (2,4,6), (3,3,6)

(1,1,2) Cálculo da probabilidade: $\left(\frac{1}{6}\right)^3 \times P_3^{2,1} = \frac{1}{72}$

(1,2,3) Cálculo da probabilidade: $\left(\frac{1}{6}\right)^3 \times P_3 = \frac{1}{36}$

(1,3,4) Cálculo da probabilidade: $\left(\frac{1}{6}\right)^3 \times P_3 = \frac{1}{36}$

(1,4,5) Cálculo da probabilidade: $\left(\frac{1}{6}\right)^3 \times P_3 = \frac{1}{36}$

(1,5,6) Cálculo da probabilidade: $\left(\frac{1}{6}\right)^3 \times P_3 = \frac{1}{36}$

(2,2,4) Cálculo da probabilidade: $\left(\frac{1}{6}\right)^3 \times P_3^{2,1} = \frac{1}{72}$

(2,3,5) Cálculo da probabilidade: $\left(\frac{1}{6}\right)^3 \times P_3 = \frac{1}{36}$

(2,4,6) Cálculo da probabilidade: $\left(\frac{1}{6}\right)^3 \times P_3 = \frac{1}{36}$

(3,3,6) Cálculo da probabilidade: $\left(\frac{1}{6}\right)^3 \times P_3^{2,1} = \frac{1}{72}$

Total:

$$\frac{1}{72}+\frac{1}{36}+\frac{1}{36}+\frac{1}{36}+\frac{1}{36}+\frac{1}{72}+\frac{1}{36}+\frac{1}{36}+\frac{1}{72}=\frac{5}{24}$$

03. Considere as hipérboles que passam pelos pontos (-4,2) e (-1,-1) e apresentam diretriz na reta y = -4. Determine a equação do lugar geométrico formado pelos focos dessas hipérboles, associados a esta diretriz, e represente o mesmo no plano cartesiano.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO 03:

Sejam

P_1 o ponto (-4,2)

P_2 o ponto (-1,-1)

F_1 o foco de coordenadas (x,y)

s a reta diretriz de equação y = -4

e a excentricidade da hipérbole.

Então:

$$\frac{dP_1,F_1}{dP_1,s} = e = \frac{dP_2,F_1}{dP_2,s} \quad (Eq.1)$$

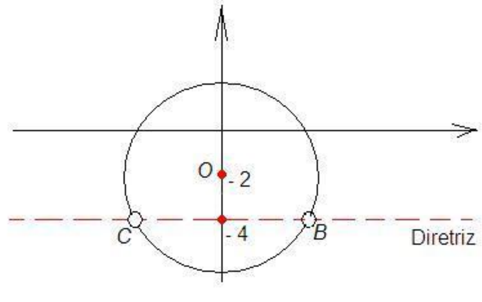
$$\frac{\sqrt{(x+4)^2+(y-2)^2}}{(2-(-4))} = \frac{\sqrt{(x+1)^2+(y+1)^2}}{(-1-(-4))} \Rightarrow$$

$$\frac{x^2+8x+16+y^2-4y+4}{36} = \frac{x^2+2x+1+y^2+2y+1}{9} \Rightarrow$$

$$3x^2+3y^2+12y-12=0$$

$$x^2+(y+2)^2=(2\sqrt{2})^2$$

O lugar geométrico dos focos seria, então, uma circunferência de raio R = $2\sqrt{2}$ e centro O(0,-2), exceto pelos pontos B e C onde esta circunferência toca a diretriz (pois os focos não podem estar sobre a diretriz, o que geraria uma cônica degenerada). A representação geométrica desta prévia é:



Entretanto, as condições de existência para o equacionamento 1, são:

CE (I):

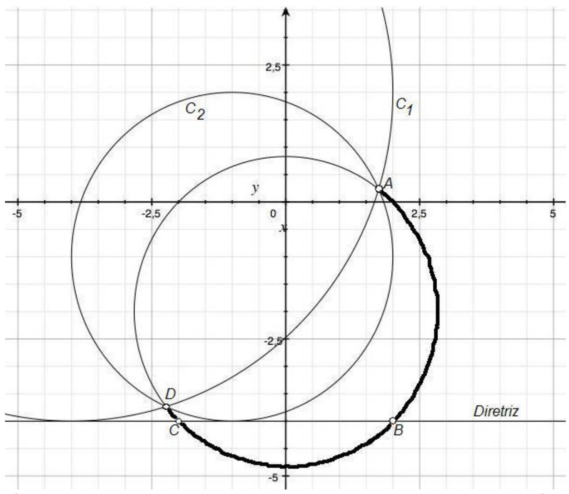
$CE_1: \ \frac{dA, F_1}{dA, s} = e > 1 \ \Rightarrow \ \frac{\sqrt{(x+4)^2 + (y-2)^2}}{(2-(-4))} > 1$

$(x+4)^2 + (y-2)^2 > 36 \ (C_1)$

$CE_2: \ \frac{dB, F_1}{dB, s} = e > 1 \ \Rightarrow \ (x+1)^2 + (y+1)^2 > 9 \ (C_2)$

e assim os focos devem estar exteriores às duas circunferências (C_1 e C_2).

E a representação gráfica final, fica:

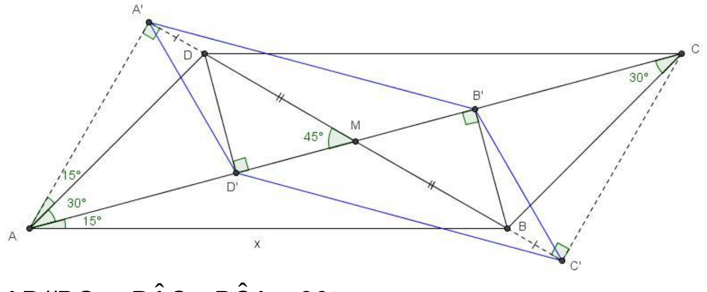


O L.G. procurado é o arco AD, da circunferência $x^2 + (y+2)^2 = (2\sqrt{2})^2$, com exceção dos pontos A, B, C e D, algebricamente representado por:

$$\begin{cases} x^2 + (y+2)^2 = (2\sqrt{2})^2 \\ (x+4)^2 + (y-2)^2 > 36 \\ (x+1)^2 + (y+1)^2 > 9 \\ y \neq -4 \end{cases}$$

04. Seja x o valor do maior lado de um paralelogramo ABCD. A diagonal AC divide A em dois ângulos, iguais a 30 e 15. A projeção de cada um dos quatro vértices sobre a reta suporte da diagonal que ao o contém forma o quadrilátero A´B´C´D´. Calcule o perímetro de A´B´C´D´.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO 04:



AD//BC $\Rightarrow D\hat{A}C = B\hat{C}A = 30^\circ$.

Lei dos senos no triângulo ABC:

$\frac{x}{\text{sen}\,30^\circ} = \frac{BC}{\text{sen}\,15^\circ} \Leftrightarrow BC = AD = x \cdot \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$.

No triângulo ADD' temos: $DD' = \frac{AD}{2} = x \cdot \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

Lei dos co-senos no triângulo ADB:

$BD^2 = AD^2 + x^2 - 2 \cdot AD \cdot x \cdot \cos 45^\circ = x^2\left(4 - 2\sqrt{3}\right) \Leftrightarrow BD = 2 \cdot DM = 2 \cdot DD' \cdot \sqrt{2}$.

Logo $D\hat{M}A = 45^\circ$ e $DD' = D'M$.

No triângulo AA'D, temos: $A'D = AD \cdot \text{sen}\,15^\circ = \frac{x}{2} \cdot \left(2 - \sqrt{3}\right)$.

Assim $A'M = A'D + DM = \frac{x}{2}$.

Lei dos co-senos no triângulo A'MD'

$\left(A'D'\right)^2 = A'M^2 + D'M^2 - 2 \cdot A'M \cdot D'M \cdot \cos 45^\circ \Leftrightarrow A'D' = \frac{x}{2} \cdot \left(\sqrt{3} - 1\right)$.

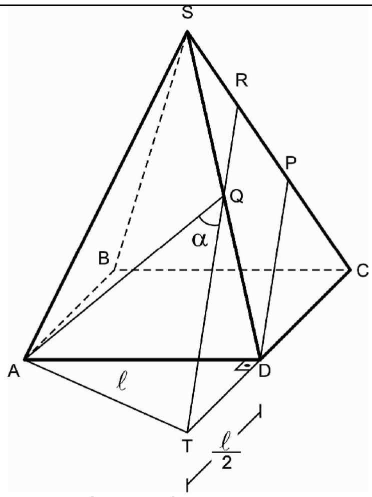
Lei dos co-senos no triângulo D'MC'

$\left(D'C'\right)^2 = D'M^2 + MC'^2 - 2 \cdot D'M \cdot MC' \cdot \cos 45^\circ \Leftrightarrow D'C' = \frac{x\sqrt{2}}{2}$.

Portanto o perímetro é $\boxed{2p = x \cdot \left(\sqrt{2} + \sqrt{3} - 1\right)}$.

05. A área da superfície lateral de uma pirâmide quadrangular regular SABCD é duas vezes maior do que a área de sua base ABCD. Nas faces SAD e SDC traçam-se as medianas AQ e DP. Calcule o ângulo entre estas medianas.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO 05:



Do enunciado, $S_{LAT} = 2S_{BASE,}$ o que resulta em $\frac{4\mathbf{l}h}{2} = 2.\mathbf{l}^2 \Rightarrow h = \mathbf{l}$, onde h é altura do Δ ADS

No Δ ADS, calculando-se a mediana $\overline{AQ} = \overline{DP} = \frac{a\sqrt{13}}{4}$

Por construção $RQ // PD$, Logo $\overline{QT} = \overline{DP}$ e $\overline{DT} = \overline{QP}$

Do Δ SDC, $\overline{QP} = \frac{\mathbf{l}}{2}$ (base média) $\Rightarrow$ $\overline{DT} = \frac{\mathbf{l}}{2}$

Do Δ ADT (retângulo em D): $\overline{AT} = \frac{\mathbf{l}\sqrt{5}}{2}$

Do Δ AQT (isósceles pois $\overline{AQ} = \overline{DP} = \overline{QT}$):

Aplicado Lei dos cossenos no triângulo AQT, encontra-se

$\cos\alpha = \frac{3}{13} \Rightarrow \boxed{\alpha = \text{arccos}\frac{3}{13}}$

06. Demonstre que a matriz

$$\begin{pmatrix} y^2+z^2 & xy & xz \\ xy & y^2+z^2 & yz \\ xz & yz & x^2+y^2 \end{pmatrix},$$

onde x,y,z $\in IN$, pode ser escrita como o quadrado de uma matriz simétrica, com traço igual a zero, cujo elementos pertencem ao conjunto dos números naturais.

Obs.: Traço de uma matriz é a soma dos elementos de sua diagonal principal

SOLUÇÃO DA QUESTÃO 06:

Seja a matriz M simétrica:

$$M = \begin{bmatrix} a & r & s \\ r & b & t \\ s & t & c \end{bmatrix},\ onde\ a+b+c=o$$

Fazendo M^2, encontra-se:

$$M^2 = \begin{bmatrix} a^2+r^2+s^2 & r(a+b)+st & s(a+c)+rt \\ r(a+b)+st & r^2+b^2+t^2 & t(b+c)+rs \\ s(a+c)+rt & t(b+c)+rs & s^2+t^2+c^2 \end{bmatrix},$$

Como devemos demonstrar que existe pelo menos uma matriz simétrica de traço nulo cujo quadrado se iguala à matriz dada, vamos fazer a = b = c = 0, daí:

$$M^2 = \begin{bmatrix} r^2+s^2 & st & rt \\ st & r^2+t^2 & rs \\ rt & rs & s^2+t^2 \end{bmatrix},$$ onde comparando-se com o enunciado encontra-se r = z, s = y e t = x.

A matriz procurada é

$$M = \begin{bmatrix} 0 & z & y \\ z & 0 & x \\ y & x & 0 \end{bmatrix}$$

07. Considere o conjunto de números complexos $E=\{a+bw\}$, onde a e b são inteiros e $w=cis(2p/3)$.

Seja o subconjunto $U=\{a \in E \mid \exists b \in E$ noqual $ab=1\}$.

Determine:

a) Os elementos de U.

b) Dois elementos pertencente ao conjunto $Y=E-U$ tais que o produto seja um número primo.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO 07:

a) Seja $a=a+bw$, $b=x+yw$, com a,b,x,y inteiros, e $w=cis(2p/3)=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$

Como $ab=1$ temos:

$$(a+bw)\cdot(x+yw)=1$$

$$ax+(bx+ay)w+byw^2=1$$

$$ax+(bx+ay)\cdot\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+by\cdot\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=1$$

$$\begin{cases} ay+b(x-y)=0 \\ a(2x-y)-b(x+y)=2 \end{cases} \quad (1)$$

Se as condições (1) forem satisfeitas para alguma quádrupla ordenada de inteiros (a,b,x,y), então $a=a+bw$ pertence a U, e necessariamente (1) também deverá ser satisfeita para a quádrupla (x,y,a,b), ou seja, $b=x+yw$ também pertencerá a U.

Comecemos provando que $a^2+b^2-ab=1$ para que $a=a+bw$ pertença a U:

$$|a|=\sqrt{a\cdot\bar{a}}=\sqrt{(a+bw)\cdot(a+b\bar{w})}=\sqrt{a^2+b^2-ab}\geq\sqrt{2|ab|-ab}\geq$$

Então, se $a=0$ e $b=0$ temos $|a|=0$, e $a\notin U$.

Caso contrário, se $ab\neq 0$, então $|a|\geq 1$.

Como, analogamente, temos $|b|\geq 1$ então concluímos que $|a|=|b|=1$, uma vez que $ab=1$.

Assim:

$$a=a+bw\in U \Rightarrow a^2+b^2-ab=1 \quad (2)$$

Mostremos ainda que a relação (2) só vale se $a\in\{-1,0,1\}$ e $b\in\{-1,0,1\}$

$$a^2-ab+(b^2-1)=0 \Rightarrow a=\frac{b\pm\sqrt{4-3b^2}}{2} \Rightarrow 4-3b^2\geq 0 \Rightarrow$$

$$\frac{-2\sqrt{3}}{3}\leq b\leq\frac{2\sqrt{3}}{3} \Rightarrow b\in\{-1,0,1\}$$

Análogo para $a\in\{-1,0,1\}$. Assim:

$$a\in\{-1,0,1\} \text{ e } b\in\{-1,0,1\} \quad (3)$$

Buscando em (1) as soluções, tendo (2) e (3) como hipóteses, por inspeção:

$a=0$ e $b=0$ $\Rightarrow$ não há soluções

$a=0$ e $b\neq 0$ $\Rightarrow$

$(a,b,x,y)=(0,1,-1,-1)$ ou $(a,b,x,y)=(0,-1,1,1)$

$a\neq 0$ e $b=0$ $\Rightarrow$

$(a,b,x,y)=(1,0,1,0)$ ou $(a,b,x,y)=(-1,0,-1,0)$

$a \neq 0$, $b \neq 0$ e $x = 0$ $\Rightarrow$

$(a,b,x,y) = (-1,-1,0,1)$ ou $(a,b,x,y) = (1,1,0,-1)$

$a \neq 0$, $b \neq 0$, $x \neq 0$ e $y = 0$ $\Rightarrow$ não há soluções

$a \neq 0$, $b \neq 0$, $x \neq 0$ e $y \neq 0$ $\Rightarrow$

isolando x e y em (1) temos

$$x = \frac{a-b}{a^2+b^2-ab} \xrightarrow{(2)} x = a-b \text{ e}$$

$$y = \frac{-b}{a^2+b^2-ab} \xrightarrow{(2)} y = -b$$

Usando as combinações possíveis que a condição (3) nos permite e usando as equações acima, não encontramos nenhuma nova solução.

Sendo assim pertencem a U os elementos $a = a + bw \in E$ tais que (a,b) esteja no conjunto $\{(1,0),(0,1),(-1,0),(0,-1),(1,1),(-1,-1)\}$, ou resumidamente:

$$\boxed{U = \{1,-1,w,-w,1+w,-1-w\}}$$

b) Como esgotamos todas as possibilidades de $a \in \{-1,0,1\}$ e $b \in \{-1,0,1\}$ e vimos que em todas elas $a = a + bw \in U$, então a condição (2) é, na verdade, do tipo "se e somente se", ou seja:

$$a = a + bw \in U \iff a^2 + b^2 - ab = 1 \quad (4)$$

Precisamos achar $z_1 = x + yw \in Y$ e $z_2 \in Y$, sabendo pois que $|z_1| \neq 1$ e $|z_2| \neq 1$, tais que $z_1 \cdot z_2 = p$, onde p é um inteiro primo.

Assim, $z_1 \cdot z_2$ é inteiro, ou seja, $z_1 \cdot z_2 = \overline{z_1 \cdot z_2}$, o que nos leva a $z_1 \cdot z_2 = |z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2| = p$.

Por simplicidade vamos procurar uma solução onde $|z_1| = |z_2| = \sqrt{p}$.

Temos pois:

$$x^2 + y^2 - xy = p$$

$$x = \frac{y \pm \sqrt{4p - 3y^2}}{2}$$

A expressão acima evidencia que $p = 3$, $y = 2$ e $x = 1$ é solução, de onde encontramos $z_1 = 1 + 2w$.

Basta fazer $z_2 = -z_1$ para que tenhamos o resultado esperado.

$$\boxed{\begin{cases} z_1 = 1 + 2w \in Y \\ z_2 = -1 - 2w \in Y \end{cases} \Rightarrow z_1 \cdot z_2 = 3}$$

08. Seja a equação $p^n + 144 = q^2$, onde n e q são números inteiros positivos e p é um número primo. Determine os possíveis valores de n, p e q.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO 08:

Primeiramente consideremos primos somente valores positivos.

$p^n + 144 = q^2$
$p^n = q^2 - 12^2$
$p^n = (q+12)(q-12)$

Como q > 0, então q + 12 > q – 12
Podemos escrever:
$(q+12) = p^{n-m}$
$(q-12) = p^m$
$p^{n-m} - p^m = (q+12) - (q-12) = 24$
$p^m(p^{n-2m} - 1) = 24$
24 = 1 x 24 ou 2 x 12 ou 3 x 8 ou 4 x 6

1ª hipótese:
$p^m(p^{n-2m} - 1) = 1 \times 24$
$p^m = 24$, não existe primo que atenda.
$p^m = 1$, qualquer primo atende se m = 0.
$p^{n-2m} - 1 = 24$
$p^{n-2.0} = 25 \rightarrow$ **p = 5, n = 2, q = 13**.

2ª hipótese:
$p^m(p^{n-2m} - 1) = 2 \times 12$
$p^m = 12$, não existe primo que atenda.
$p^m = 2 \rightarrow p = 2, m = 1$
$(p^{n-2m} - 1) = 12$, $p^{n-2m} = 13$, p = 13, mas a condição anterior diz p = 2.

3ª hipótese:
$p^m(p^{n-2m} - 1) = 3 \times 8$
$p^m = 3$, **p = 3**, m = 1
$p^{n-2m} - 1 = 8 \rightarrow p^{n-2.1} = 9 \rightarrow$ **p = 3, n = 4, q = 15**.
ou
$p^m = 8$, **p = 2**, m = 3
$p^{n-2m} - 1 = 3 \rightarrow p^{n-2.3} = 4 \rightarrow$ **p = 2, n = 8, q = 20**.

4ª hipótese:
$p^m(p^{n-2m} - 1) = 4 \times 6$
$p^m = 4 \rightarrow p = 2, m = 2$
$(p^{n-2m} - 1) = 6 \rightarrow p^{n-2.2} = 7$, p = 7, mas a condição anterior dizia que n = 2.

Assim, as soluções (n, p, q) garimpadas foram

<u>S = {(2, 5, 13), (4, 3, 15), (8, 2, 20)}.</u>

Se incluíssemos a possibilidade de primos negativos, a resolução seria análoga, e chegaríamos em

<u>S = {(2, 5, 13), (2, –5, 13), (4, 3, 15), (4 –3, 15), (8, 2, 20), (8, –2, 20), (1, –23, 11), (7, –2, 4)}.</u>

09. Seja o sistema

$$\begin{cases} \operatorname{tg}(x)\operatorname{tg}(y-z) = a \\ \operatorname{tg}(y)\operatorname{tg}(z-x) = b \\ \operatorname{tg}(z)\operatorname{tg}(x-y) = c \end{cases}$$, onde $a,b,c,x,y,z \in IR$. Determine as condições que a, b e c devem satisfazer para que o sistema admita pelo menos uma solução.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO 09:

Vamos provar que uma **condição necessária** para que haja solução é que $a+b+c+abc=0$. Veremos, entretanto, que essa condição não é suficiente, sendo necessário identificar em que situações o sistema efetivamente possui solução para podermos apresentar uma **condição necessária e suficiente** sobre os valores de a, b e c.

Fazendo a mudança de variáveis:

$$\begin{cases} p_1 = (\operatorname{tg} x)(\operatorname{tg} y) \\ p_2 = (\operatorname{tg} y)(\operatorname{tg} z) \\ p_3 = (\operatorname{tg} z)(\operatorname{tg} x) \end{cases}$$

Note que se o conjunto $\{p_1, p_2, p_3\}$ possui 2 elementos negativos e 1 positivo ou os 3 positivos, há solução:

$$\operatorname{tg} x = \pm\sqrt{\frac{p_1 p_3}{p_2}},\ \operatorname{tg} y = \pm\sqrt{\frac{p_1 p_2}{p_3}} \text{ e } \operatorname{tg} z = \pm\sqrt{\frac{p_2 p_3}{p_1}}$$

O sistema equivale a

$$\begin{cases} \dfrac{p_1 - p_3}{1+p_2} = a \\ \dfrac{p_2 - p_1}{1+p_3} = b \\ \dfrac{p_3 - p_2}{1+p_1} = c \end{cases}$$

Este, para $p_1 \neq -1$, $p_2 \neq -1$ e $p_3 \neq -1$ (*), equivale a

$$\begin{pmatrix} 1 & -a & -1 \\ -1 & 1 & -b \\ -c & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \quad (**)$$

O determinante principal desse sistema é:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -a & -1 \\ -1 & 1 & -b \\ -c & -1 & 1 \end{vmatrix} = -(a+b+c+abc)$$

Os determinantes secundários são:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a & -a & -1 \\ b & 1 & -b \\ c & -1 & 1 \end{vmatrix} = a+b+c+abc$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & a & -1 \\ -1 & b & -b \\ -c & c & 1 \end{vmatrix} = a+b+c+abc$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & -a & a \\ -1 & 1 & b \\ -c & -1 & c \end{vmatrix} = a+b+c+abc$$

Assim, pela regra de Cramer, se $a+b+c+abc \neq 0$, existe uma única solução para o sistema em p_1, p_2, p_3, a saber:

$$p_1 = p_2 = p_3 = \frac{a+b+c+abc}{-(a+b+c+abc)} = -1.$$

Mas, de (*), $p_1 \neq -1$, $p_2 \neq -1$ e $p_3 \neq -1$, logo, neste caso, o sistema não possui soluções.

Assim, uma condição necessária para que haja solução é que $a+b+c+abc=0$. Essa condição, entretanto, pode não ser suficiente.

Supondo que $\Delta = 0$, ou seja, que $a+b+c+abc=0$ (***).

As duas primeiras equações do sistema (**) são dependentes se, e somente se, $a=1$ e $b=-1$.

As duas últimas são dependentes se, e somente se, $a=-1$ e $c=1$.

Assim, sempre haverá pelo menos duas equações independentes (a característica da matriz principal é sempre 2, e o sistema é possível indeterminado).

Analisaremos dois casos:

1º caso: $a=1$ e $b=-1$

O sistema tem matriz completa:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -c & -1 & 1 & c \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -c-1 & 0 & 2 & c-1 \end{pmatrix}$$

Logo, a solução é dada por

$$p_1 \in \mathbb{R}$$

$$p_3 = \frac{c-1+(c+1)p_1}{2}$$

$$p_2 = p_1 - p_3 - 1 = \frac{(1-c)}{2}p_1 - \frac{(c+1)}{2}$$

Se $c+1=0$, temos $p_3=-1$, logo, neste caso, não há solução.

Se $1-c=0$, temos $p_2=-1$, logo, não há solução.

Se $(c+1)(c-1)\neq 0$, temos dois casos:

- $(c+1)$ e $(1-c)$ são ambos positivos: basta tomar p_1 grande o suficiente e teremos três positivos em $\{p_1, p_2, p_3\}$.
- $(c+1)$ e $(1-c)$ são ambos negativos: basta tomar p_1 grande o suficiente e teremos um positivo e dois negativos em $\{p_1, p_2, p_3\}$.
- $(c+1)$ e $(1-c)$ têm sinais opostos: basta tomar p_1 pequeno o suficiente (número negativo de módulo suficientemente grande) e teremos um positivo e dois negativos em $\{p_1, p_2, p_3\}$.

Nesses casos, há solução.

Os casos ($a=-1$ e $c=1$) e ($b=1$ e $c=-1$) são análogos.

Note que se $a=1$, temos

$$1+b+c+bc=0 \Leftrightarrow (1+b)(1+c)=0 \Leftrightarrow b=-1 \vee c=-1.$$

Da mesma forma, se $a=-1$ temos

$$-1+b+c-bc=0 \Leftrightarrow (b-1)(1-c)=0 \Leftrightarrow b=1 \vee c=1$$

2º caso: caso contrário
O sistema equivale ao formado pelas duas primeiras equações, logo

$$\begin{pmatrix} 1 & -a & -1 \\ -1 & 1 & -b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -a & -1 \\ 0 & 1-a & -b-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a \\ a+b \end{pmatrix}$$

$p_1 - ap_2 - p_3 = a$, $(1-a)p_2 - (b+1)p_3 = a+b$,

$p_3 \in \mathbb{R}$

$p_2 = \dfrac{(a+b)+(b+1)p_3}{1-a}$, pois $a \neq 1$ e $b \neq -1$

$$p_1 = a + a\cdot\frac{(a+b)+(b+1)p_3}{1-a} + p_3 = \frac{(ab+a)+(ab+1)p_3}{1-a}$$

- Se $ab+1=0$, então $p_1 = -1$. Logo, o sistema não possui solução. Note que, quando $ab=-1$, por (***), $a+b+c-c=0 \Leftrightarrow a=-b \Leftrightarrow a^2=1 \Leftrightarrow a=-1$, que recai no 1º caso.

Para $ab+1 \neq 0$, temos dois casos:

- Se $(b+1)$ e $(ab+1)$ têm mesmo sinal, basta tomar p_3 grande o suficiente e teremos dois negativos e um positivo ou três positivos em $\{p_1, p_2, p_3\}$.
- Se $(b+1)$ e $(ab+1)$ têm sinais contrários, basta tomar p_3 pequeno o suficiente e teremos dois negativos e um positivo em $\{p_1, p_2, p_3\}$.

Nesses casos, há solução.

Concluindo:
Para que o sistema tenha pelo menos uma solução é necessário e suficiente que

$$abc + a + b + c = 0 \ \wedge \ \{a, b, c\} \neq \{1, -1\}$$

Isso mostra que se qualquer permutação de (a, b, c) é igual a um dos ternos $(1,1,-1)$ ou $(-1,-1,1)$, o sistema não possui solução.

10. Considere a seqüência:

$$a_1 = \sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\frac{1}{2}},\ a_2 = \sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\frac{1}{2}}},$$

$$a_3 = \sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\frac{1}{2}}}}},\ \ldots\ldots$$

Determine o produto dos 20 primeiros termos desta seqüência.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO 10:

$a_1 = \sqrt{\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{2}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \cos 30°$

$a_2 = \sqrt{\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\cos 30°} = \cos 15°$

$a_3 = \sqrt{\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\cos 15°} = \cos 7{,}5°$

...

$a_{20} = \sqrt{\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\cos\left(30°/2^{18}\right)} = \cos(30°/2^{19})$

Assim o produto a ser calculado é

$P = \cos(30/2^{19})°.\ \cos(30/2^{18})°\ldots \cos 15°.\cos 30°$

Multiplicando ambos os membros por $\operatorname{sen}(30/2^{19})°$, temos:

$\operatorname{sen}(30/2^{19})°.P = \operatorname{sen}(30/2^{19})°.\cos(30/2^{19})°\ .\ \cos(30/2^{18})°\ .\ \cos(30/2^{17})°\ldots \cos 15°.\cos 30°$

$\operatorname{sen}(30/2^{19})°.P = \left(\dfrac{1}{2}\right).\operatorname{sen}(30/2^{18})°.\cos(30/2^{18})°\ .\ \cos(30/2^{17})°\ldots \cos 15°.\cos 30°$

$\operatorname{sen}(30/2^{19})°.P = \left(\dfrac{1}{4}\right).\operatorname{sen}(30/2^{17})°.\cos(30/2^{17})°\ldots \cos 15°.\cos 30°$

(...)

$\operatorname{sen}(30/2^{19})°.P = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{20} \operatorname{sen}(2.30)°$

$$P = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{20}.\operatorname{sen}60°}{\operatorname{sen}(30°/2^{19})} = \boxed{\frac{\sqrt{3}}{2^{21}.\operatorname{sen}(30°/2^{19})}}$$

Fone : 3013-5400
www.ELITECURITIBA.com.br