

O **ELITE CURITIBA** é líder disparado de aprovações em escolas militares no Paraná. Confira alguns resultados:



**ITA – 17 aprovados!**

Em 2011, dos 5 aprovados do Sul do Brasil no ITA, 4 são do Elite Curitiba.

2011: BRUNA HALILA MORRONE  
2011: BERNARDO MOSCARDINI FABIANI  
2011: DANIEL CAUEH DUNAISKI FIGUEIRA LEAL  
2011: ROBERTO BRUNSICKI  
2010: TARCÍSIO AUGUSTO BONFIM GRIPP  
2010: ALLISON FAUAT SCHRAIER  
2009: LEONARDO FRISSE MATTEDI  
2008: JULIANO A. DE BONFIM GRIPP  
2008: LUCAS BRIANEZ FONTOURA  
2008: MAURICIO FLAVIO D. DE MORAES  
2007: CAMILA SARDETO DEOLINDO  
2007: VITOR ALEXANDRE C. MARTINS  
2006: GABRIEL KENDJY KOIKE  
2006: RICARDO ITIRO SABOTA TOMINAGA  
2006: YVES CONSELVAN  
2005: EDUARDO HENRIQUE LEITNER  
2005: FELLIPE LEONARDO CARVALHO



**IME – 59 aprovados!**

2012: 5 aprovados de 6 do Paraná  
2011: 9 aprovados de 12 do Sul do Brasil  
2010: 5 aprovados de 5 do Paraná  
2009: 6 aprovados de 8 do Sul do Brasil  
2008: 12 aprovados  
2007: 11 aprovados de 16 do Paraná  
2006: 4 aprovados (únicos do Paraná)  
2005: 7 aprovados (3 únicos convocados do Paraná)



**AFA – 118 aprovados!**

2012: 19 aprovados de 25 do Paraná (incluindo 3 alunos entre os 15 primeiros do Brasil)  
FÁBIO SCHUBERT GELBCKE  
MARIO CASTELLO BRANCO GOMES  
RAFAEL NERONE GADENS  
GABRIEL HENRIQUE VIANA FELICIO  
BRUNA SALOMÃO CABRAL  
CARLOS ALEXANDRE NOVAK MADUREIRA  
MATHEUS NAMI BERTOLDI  
GIANCARLO DO PRADO FRASSON  
RUAN HENRIQUE COLOMBO  
RENAN LUIZ OTAVIO KICHEL DA SILVA  
PEDRO BAZIA NETO  
ALESSANDRA CAROLINE LOVISETTO TRENTIN  
CESAR PEREIRA DE FREITAS  
LUCIANA RODRIGUES SILVA  
RAFAEL FERNANDES DOMINGUES  
JOSÉ ÂNGELO STIVAL NETO  
JOÃO EDUARDO PEDROSA  
FERNANDO BARREIROS BOLZON  
FÁBIO NADAL GRIGOLO  
2011: 28 aprovados  
2010: 22 aprovados  
2009: 14 aprovados de 20 do Paraná (incluindo o 2º lugar geral do Brasil)  
2008: 14 aprovados  
2007: 10 aprovados de 14 do Paraná  
2006: 11 aprovados de 18 do Paraná



**ESPCEX – 63 aprovados!**

2011: 11 aprovados (turma de 40 alunos)  
2010: 13 aprovados  
2009: 10 aprovados (incluindo 5 entre os 10 primeiros do Paraná)  
2008: 11 aprovados (incluindo o 1º e o 2º do Paraná)  
2007: 9 aprovados  
2006: 9 aprovados



**EEAR**

2012: 17 aprovações  
2011: 6 aprovações (incluindo o 1º lugar geral do Brasil – Larissa Polli da Costa)  
2009: 3 aprovações  
2008: 4 aprovações (incluindo os 2ºs lugares dos grupos 1 e 2)  
2006: 2 convocados



**EPCAr – nova turma!**

2012: 4 aprovados de 5 do Paraná  
BRUNO HENRIQUE DE AGUIAR  
DIEGO JONATAN BERTOLO  
FELIPE DE FREITAS  
LUCAS TEIXEIRA MARTINS



**Colégio Naval – nova turma!**

2012: 6 aprovados na 1ª fase (100% da turma)  
DANIEL FIGEUIRA SAUTCHUK  
DIEGO JONATAN BERTOLO  
EDSON BAREIRO FILHO  
LUCAS BUTSCHKAU VIDAL  
MATHEUS MACHADO VIANNA  
PÉRICLES JOSÉ CARNEIRO JUNIOR



**EFOMM**

2012: 4 aprovados de 5 do Paraná  
ANDRESSA DA SILVA VIANNA  
ARTHUR MEDEIROS TIMM DE LIMA  
BRUNA SALOMÃO CABRAL  
LUCAS SANTANA EGEB  
2011: 3 aprovados



**Escola Naval**

2011: 3 aprovados (únicos do Paraná)

Turma de Extensivo com resultados crescentes na Federal do Paraná:



**UFPR**

2011: 21 aprovados (turma de 30 alunos)  
2010: 16 aprovados (Tânia Hadas em Medicina)  
2009: 17 aprovados  
2008: 9 aprovados  
2007: 70% de aprovação na 1ª fase  
2006:  
1º Lugar em Eng. Mecânica  
2º Lugar em Eng. Eletrônica  
2005:  
1º Lugar em Direito (matutino)  
1º Lugar em Relações Públicas



**UTFPR**

2010: 16 aprovados.  
2009: 36 aprovados  
2008: 30 aprovados  
1º, 2º e 4º lugares – Eng. Ind. Mecânica  
1º e 2º lugares – Eng. Eletrônica / Eletrotécnica  
1º lugar – Eng. de Computação  
2007: 17 aprovados  
2006: 22 aprovados  
1º Lugar em Eng. Mecânica  
2º Lugar em Eng. Eletrônica

Só no **ELITE** você encontra:

- Turmas reduzidas de alto desempenho e direcionadas por concursos
- Carga elevada de simulados e exercícios
- Exatas no mais alto nível, com professores do ITA e IME
- Revisão dos últimos 10 anos dos concursos



CURITIBA

3013-5400

Novo endereço: Rua Inácio Lustosa, 281  
ao lado do Shopping Mueller

Acesse: [www.elitecuritiba.com.br](http://www.elitecuritiba.com.br)

**MATEMÁTICA**

**01.** Deseja-se trocar uma moeda de 25 centavos, usando-se apenas moedas de 1, 5 e 10 centavos. Então, o número de diferentes maneiras em que a moeda de 25 centavos pode ser trocada é igual a

a) 6.      b) 8.      c) 10.      d) 12.      e) 14.

**Solução: D**

Definidas as quantidades de moedas de 10 e de 5 as moedas de 1 ficam "amarradas" pela soma igual a 25.

Sejam  $x, y, z$  as quantidades de moedas de 1, 5 e 10 centavos respectivamente.

• Para  $z = 0$  temos  $x + 5y = 25$  e então temos 6 possibilidades para  $y (y \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\})$

• Para  $z = 1$  temos  $x + 5y = 15$  e então temos 4 possibilidades para  $y (y \in \{0, 1, 2, 3\})$

• Para  $z = 2$  temos  $x + 5y = 5$  e então  $y = 0$  ou  $y = 1$ .

Portanto temos  $6 + 4 + 2 = 12$  possibilidades de trocar 25 centavos com moedas de 1, 5 e 10 centavos.

**02.** Dois atiradores acertam o alvo uma vez a cada três disparos. Se os dois atiradores dispararam simultaneamente, então a probabilidade do alvo ser atingido pelo menos uma vez é igual a

- a)  $\frac{2}{9}$ .      b)  $\frac{1}{3}$ .      c)  $\frac{4}{9}$ .      d)  $\frac{5}{9}$ .      e)  $\frac{2}{3}$ .

**Solução: D**

**1ª solução:**

$P(\text{Ao menos um acertar}) = 1 - P(\text{dois errarem}) = 1 - \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{5}{9}$

**2ª solução:**

Sejam  $A$  e  $B$  os eventos onde o 1º e o 2º acertam.

Então:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$P(A \cup B) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{9} = \frac{5}{9}$$

**03.** Sejam  $z = n^2 (\cos 45^\circ + i \operatorname{sen} 45^\circ)$  e  $w = n (\cos 15^\circ + i \operatorname{sen} 15^\circ)$ , em que  $n$  é o menor inteiro positivo tal que  $(1+i)^n$  é real. Então,  $\frac{z}{w}$  é igual a

- a)  $\sqrt{3} + i$ .      b)  $2(\sqrt{3} + i)$ .      c)  $2(\sqrt{2} + i)$ .  
d)  $2(\sqrt{2} - i)$ .      e)  $2(\sqrt{3} - i)$ .

**Solução: B**

Passando  $(1+i)$  para a forma trigonométrica:

$$1+i = \sqrt{2} (\cos 45^\circ + i \operatorname{sen} 45^\circ).$$

Pela 1ª equação de Moivre:

$$(1+i)^n = (\sqrt{2})^n (\cos(n \cdot 45^\circ) + i \operatorname{sen}(n \cdot 45^\circ))$$

Logo o menor inteiro que torna  $(1+i)^n$  real é: 4.

Assim:

$$\frac{z}{w} = \frac{z \cdot \bar{w}}{|w|^2} = \frac{n^2 \cdot n \cdot (\cos(45^\circ - 15^\circ) + i \operatorname{sen}(45^\circ - 15^\circ))}{n^2} \rightarrow$$

$$= n \cdot (\cos(45^\circ - 15^\circ) + i \operatorname{sen}(45^\circ - 15^\circ)) \rightarrow$$

$$= 4 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i \frac{1}{2}\right) = 2(\sqrt{3} + i)$$

**04.** Se  $\arg z = \frac{\pi}{4}$ , então um valor para  $\arg(-2iz)$  é

- a)  $-\frac{\pi}{2}$ .      b)  $\frac{\pi}{4}$ .      c)  $\frac{\pi}{2}$ .      d)  $\frac{3\pi}{4}$ .      e)  $\frac{7\pi}{4}$ .

**Solução: E**

Sejam  $z = r \operatorname{cis} \frac{\pi}{4}$  e  $-2i = 2 \operatorname{cis} \frac{3\pi}{2}$  então

$$-2iz = 2r \operatorname{cis} \left(\frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = 2r \operatorname{cis} \frac{7\pi}{4} \quad \text{e portanto,}$$

$$\arg(-2iz) = \frac{7\pi}{4}.$$

**05.** Sejam  $r_1, r_2$  e  $r_3$  números reais tais que  $r_1 - r_2$  e  $r_1 + r_2 + r_3$  são racionais. Das afirmações:

- I. Se  $r_1$  é racional ou  $r_2$  é racional, então  $r_3$  é racional;  
II. Se  $r_3$  é racional, então  $r_1 + r_2$  é racional;  
III. Se  $r_3$  é racional, então  $r_1$  e  $r_2$  são racionais, é (são) sempre verdadeira(s)
- a) apenas I.      b) apenas II.      c) apenas III.

d) apenas I e II. e) I, II e III.

**Solução: E**

Condições do enunciado:

(i)  $r_1 - r_2 \in Q$

(ii)  $r_1 + r_2 + r_3 \in Q$

**I – VERDADEIRA**

Se  $r_1$  é racional, então por (i),  $r_2 \in Q$ . Assim, se  $r_1 \in Q$  e  $r_2 \in Q$ , então por (ii)  $r_3 \in Q$ .

Analogamente, se:  $r_2$  é racional, então por (i),  $r_1 \in Q$ . Assim, se  $r_1 \in Q$  e  $r_2 \in Q$ , então por (ii)  $r_3 \in Q$ .

**II – VERDADEIRA**

Idem ao raciocínio na alternativa I.  
Se  $r_3 \in Q$ , então por (ii)  $r_1 + r_2 \in Q$ .

**III – VERDADEIRA**

Se  $r_3 \in Q$ , então por (ii)  $r_1 + r_2 \in Q$ .  
Segue que se  $r_1 + r_2 \in Q$  e  $r_1 - r_2 \in Q$  (i), então  $(r_1 + r_2) + (r_1 - r_2) \in Q \rightarrow 2r_1 \in Q \rightarrow r_1 \in Q$ . Assim, por (i) novamente,  $r_2 \in Q$ .

**06.** As raízes  $x_1, x_2$  e  $x_3$  do polinômio  $p(x) = 16 + ax - (4 + \sqrt{2})x^2 + x^3$  estão relacionadas pelas equações:

$x_1 + 2x_2 + \frac{x_3}{2} = 2$  e  $x_1 - 2x_2 - \sqrt{2}x_3 = 0$ .

Então, o coeficiente  $a$  é igual a

a)  $2(1 - \sqrt{2})$ . b)  $2(2 + \sqrt{2})$ . c)  $4(\sqrt{2} - 1)$ .

d)  $4 + \sqrt{2}$ . e)  $\sqrt{2} - 4$ .

**Solução: C**

Utilizando a relação de Girard:  
 $x_1 + x_2 + x_3 = -b/a = (4 + \sqrt{2})$ ;

e as equações fornecidas no enunciado, ficamos com o seguinte sistema linear possível e determinado.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = (4 + \sqrt{2}) \\ x_1 + 2x_2 + \frac{x_3}{2} = 2 \\ x_1 - 2x_2 - \sqrt{2}x_3 = 0 \end{cases}$$

Suas soluções, são:

$(x_1, x_2, x_3) = (2\sqrt{2}, -\sqrt{2}, 4)$

Sabendo que  $p(x_3) = 0$ , tem-se:

$$\begin{aligned} p(x_3) &= 16 + a \cdot 4 - (4 + \sqrt{2}) \cdot 4^2 + 4^3 = 0 \\ 4a &= 16(4 + \sqrt{2}) - 80 \\ a &= 4\sqrt{2} - 4 = 4(\sqrt{2} - 1) \end{aligned}$$

**07.** Sabe-se que  $(x + 2y, 3x - 5y, 8x - 2y, 11x - 7y + 2z)$  é uma progressão aritmética com o último termo igual a  $-127$ . Então o produto  $xyz$  é igual a

a)  $-60$ . b)  $-30$ . c)  $0$ . d)  $30$ . e)  $60$ .

**Solução: A**

$PA: (x + 2y, 3x - 5y, 8x - 2y, 11x - 7y + 2z) = (a_1, a_2, a_3, a_4)$

$$\begin{cases} a_2 - a_1 = 2x - 7y = 5x + 3y = a_3 - a_2 \Rightarrow 3x = -10y \\ a_3 - a_2 = 5x + 3y = 3x - 5y + 2z = a_4 - a_3 \Rightarrow 2x + 8y = 2z \end{cases}$$

Desta forma, conseguimos o sistema de equações,

$$\begin{cases} 3x = -10y & : (1) \\ 2x + 8y - 2z = 0 & : (2) \\ 11x - 7y + 2z = -127 & : (3) \end{cases}$$

$(2) + (3) : 13x + y = -127$   
Substituindo a equação (1) nesta última chegamos a  $130x - 3x = -1270 \Rightarrow x = -10$ .

Voltando à equação (1) encontramos  $-30 = -10y \Rightarrow y = 3$  e portanto  $z = 2$ .

Sendo assim  $x \cdot y \cdot z = -60$

**08.** Considere um polinômio  $p(x)$ , de grau 5, com coeficientes reais. Sabe-se que  $-2i$  e  $i - \sqrt{3}$  são duas de suas raízes. Sabe-se, ainda, que dividindo-se  $p(x)$  pelo polinômio  $q(x) = x - 5$  obtém-se resto zero e que  $p(1) = 20(5 + 2\sqrt{3})$ . Então

$p(1)$  é igual a

a)  $5(5 - 2\sqrt{3})$ . b)  $15(5 - 2\sqrt{3})$ . c)  $30(5 - 2\sqrt{3})$ .  
d)  $45(5 - 2\sqrt{3})$ . e)  $50(5 - 2\sqrt{3})$ .

**Solução: C**

$P(x)$  é do 5º grau com coeficientes reais e além disso é divisível por  $x - 5$ , portanto as raízes de  $P(x)$  são  $-2i, 2i, i - \sqrt{3}, -i - \sqrt{3}$  e  $5$ .

Desta forma podemos escrever,

$$P(x) = A_0(x-2i)(x+2i)(x-i+\sqrt{3})(x+i+\sqrt{3})(x-5)$$

$$\Rightarrow P(x) = A_0(x^2+4)(x^2+2\sqrt{3}x+4)(x-5)$$

$$P(1) = 20(5+2\sqrt{3}) \Rightarrow A_0 \cdot (5) \cdot (5+2\sqrt{3})(-4) = 20(5+2\sqrt{3})$$

$$\Rightarrow \boxed{A_0 = -1}$$

$$\Rightarrow P(1) = (-1) \cdot (5)(5-2\sqrt{3})(-6) = 30(5-2\sqrt{3})$$

**09.** Um triângulo ABC tem lados com medidas

$$a = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ cm}, b = 1 \text{ cm} \text{ e } c = \frac{1}{2} \text{ cm. Uma circunferên-$$

cia é tangente ao lado  $a$  e também aos prolongamentos dos outros dois lados do triângulo, ou seja, a circunferência é ex-inscrita ao triângulo. Então o raio da circunferência, em  $\text{cm}$ , é igual a

- a)  $\frac{\sqrt{3}+1}{4}$ .      b)  $\frac{\sqrt{3}}{4}$ .      c)  $\frac{\sqrt{3}+1}{3}$ .  
d)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ .      e)  $\frac{\sqrt{3}+2}{4}$ .

**Solução: A**

Como  $a = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ,  $b = 1$ ,  $c = 1$  tem-se que

$a^2 + c^2 = b^2$  consequentemente o triângulo é retângulo em B. Se P e Q são os pontos de tangência da circunferência com os prolongamentos dos lados AB e BC respectivamente então o quadrilátero IPBQ é um quadrado cujo lado é o raio procurado. Temos então que

$$r = p - c = \frac{1}{2} + 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}+1}{4}$$

**10.** Sejam  $A=(0,0)$ ,  $B=(0,6)$  e  $C=(4,3)$  vértices de um triângulo. A distância do baricentro deste triângulo ao vértice  $A$ , em unidades de distância, é igual a

- a)  $\frac{5}{3}$ .      b)  $\frac{\sqrt{97}}{3}$ .      c)  $\frac{\sqrt{109}}{3}$ .      d)  $\frac{\sqrt{5}}{3}$ .      e)  $\frac{10}{3}$ .

**Solução: B**

O baricentro é encontrado pela média aritmética das coordenadas dos vértices

$$G = (4/3, 9/3)$$

A distância entre dois pontos é dada por

$$d = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$$

$$d = \sqrt{\left(\frac{4}{3}\right)^2 + 3^2}$$

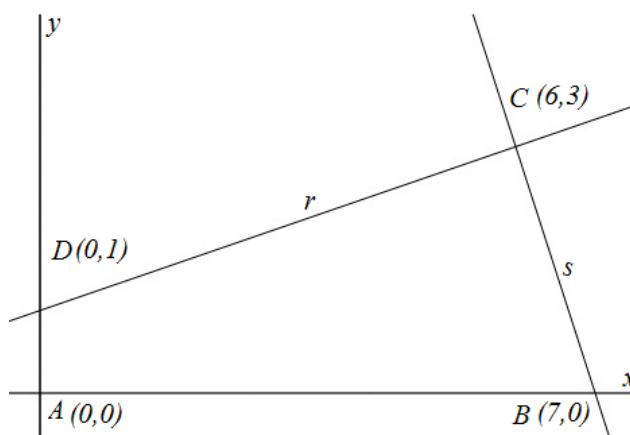
$$d = \sqrt{\frac{97}{9}}$$

$$d = \frac{\sqrt{97}}{3}$$

**11.** A área do quadrilátero definido pelos eixos coordenados e as retas  $r: x-3y+3=0$  e  $s: 3x+y-21=0$ , em unidades de área, é igual a

- a)  $\frac{19}{2}$ .      b) 10.      c)  $\frac{25}{2}$ .      d)  $\frac{27}{2}$ .      e)  $\frac{29}{2}$ .

**Solução: D**



O quadrilátero ABCD pode ter suas coordenadas facilmente desveladas, como na figura acima, uma vez que as retas  $r$  e  $s$  foram dadas, com todos os coeficientes numericamente fornecidos.

Do encontro de  $r$  com o eixo  $Oy$  ( $x=0$ ), obtemos  $y=1$ , o que nos leva ao ponto D.

Do encontro de  $s$  com o eixo  $Ox$  ( $y=0$ ), obtemos  $x=7$ , o que nos leva ao ponto B.

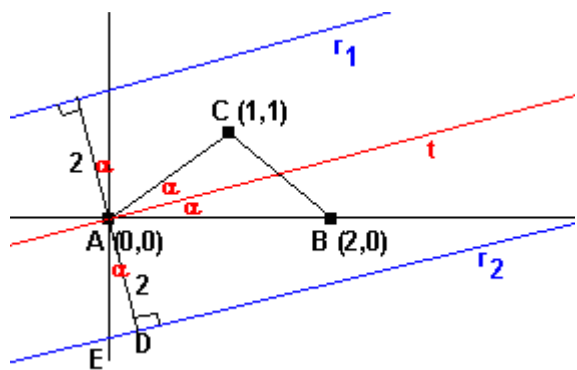
Do encontro de  $r$  com  $s$ , sistema linear de 2 equações e 2 incógnitas, obtemos o ponto C.

Dividindo o quadrilátero nos triângulos ABC e ACD, de áreas respectivamente  $7 \cdot 3/2 = 21/2$  e  $1 \cdot 6/2 = 6/2$ , chegamos facilmente aos  $27/2$ .

12. Dados os pontos  $A=(0,0)$ ,  $B=(2,0)$  e  $C=(1,1)$ , o lugar geométrico dos pontos que se encontram a uma distância  $d=2$  da bissetriz interna, por  $A$ , do triângulo  $ABC$  é um par de retas definidas por

- a)  $r_{1,2}: \sqrt{2}y - x \pm 2\sqrt{4+\sqrt{2}} = 0$   
 b)  $r_{1,2}: \frac{\sqrt{2}}{2}y - x \pm 2\sqrt{10+\sqrt{2}} = 0$   
 c)  $r_{1,2}: 2y - x \pm 2\sqrt{10+\sqrt{2}} = 0$   
 d)  $r_{1,2}: (\sqrt{2}+1)y - x \pm \sqrt{2+4\sqrt{2}} = 0$   
 e)  $r_{1,2}: (\sqrt{2}+1)y - x \pm 2\sqrt{4+2\sqrt{2}} = 0$

**Solução: E**



A reta  $AC$  possui inclinação de  $45^\circ$ .  
 A reta  $t$ , bissetriz do triângulo, possui inclinação  $\alpha = (45/2)^\circ$ .

$$\operatorname{tg}(45) = \frac{2\operatorname{tg}(45/2)}{1 - \operatorname{tg}^2(45/2)}$$

$$1 - \operatorname{tg}^2(45/2) = 2\operatorname{tg}(45/2)$$

Resolvendo a equação temos

$$\operatorname{tg}(45/2) = -1 + \sqrt{2}.$$

A reta  $t$  possui equação

$$y = (-1 + \sqrt{2})x$$

assim como as retas  $r_{1,2}$ .

Para encontrar o ponto  $E$  basta fazer

$$\cos(\alpha) = \frac{2}{AE}$$

$$\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{4}} = \frac{2}{AE}$$

$$\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{4}} = \frac{2}{AE}$$

$$AE = \frac{4}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}$$

Então

$$r_{1,2}: y = (-1 + \sqrt{2})x \pm \frac{4}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}.$$

$$r_{1,2}: y - (-1 + \sqrt{2})x \pm \frac{4}{\sqrt{2+\sqrt{2}}} = 0.$$

$$r_{1,2}: \frac{y}{(\sqrt{2}-1)} - x \pm \frac{4}{\sqrt{2+\sqrt{2}}(\sqrt{2}-1)} = 0.$$

$$r_{1,2}: y(\sqrt{2}+1) - x \pm \frac{4}{\sqrt{(2+\sqrt{2})(\sqrt{2}-1)^2}} = 0.$$

$$r_{1,2}: y(\sqrt{2}+1) - x \pm \frac{4}{\sqrt{(2-\sqrt{2})}} = 0.$$

$$r_{1,2}: y(\sqrt{2}+1) - x \pm 2\sqrt{2\sqrt{2}+4} = 0.$$

13. Sejam  $A, B$  e  $C$  subconjuntos de um conjunto universo  $U$ . Das afirmações:

I.  $(A \setminus B^c) \setminus C^c = A \cap (B \cup C)$ ;

II.  $(A \setminus B^c) \setminus C = A \cup (B \cap C^c)^c$ ;

III.  $B^c \cup C^c = (B \cap C)^c$ ,

é (são) sempre verdadeira(s) apenas

- a) I.    b) II.    c) III.    d) I e III.    e) II e III.

**Solução: C**

I. Falsa

Temos que  $x \setminus y^c = x \cap y$ , logo

$$A \setminus B^c \setminus C^c = A \cap B \cap C \neq A \cap B \cup C$$

II. Falsa

Se  $C \neq \emptyset$ , tome  $x \in C$ :

$$x \notin A \setminus B^c \setminus C \text{ e } x \in A \cup B \cap C^c = A \cup B^c \cup C$$

Logo não vale a igualdade

III. Verdadeira

Lei de DeMorgan

14. Sejam  $A$  e  $B$  dois conjuntos disjuntos, ambos finitos e não-vazios, tais que  $n(P(A) \cup P(B)) + 1 = n(P(A \cup B))$ . Então, a diferença  $n(A) - n(B)$  pode assumir

a) um único valor.

- b) apenas dois valores distintos.  
c) apenas três valores distintos.  
d) apenas quatro valores distintos.  
e) mais do que quatro valores distintos.

**Solução: A**

Sejam  $n(A) = x$  e  $n(B) = y$  então,  $n(P(A)) = 2^x$  e  $n(P(B)) = 2^y$  e como A e B são disjuntos  $n(P(A) \cup P(B)) = 2^x + 2^y - 1$  e  $n(P(A \cup B)) = 2^{x+y}$  daí,

$$n(P(A) \cup P(B)) + 1 = n(P(A \cup B)) \Leftrightarrow 2^x + 2^y - 1 + 1 = 2^{x+y} \Leftrightarrow 2^{x-y} + 1 = 2^x$$

como  $x \neq 0$  então  $2^x$  é par o que implica em  $2^{x-y} + 1$  ser par e daí,  $x - y = 0$  e  $x = y = 1$  logo  $n(A) - n(B)$  pode assumir um único valor.

**15.** Considere um número real  $a \neq 1$  positivo, fixado, e a equação em  $x$   $a^{2x} + 2\beta a^x - \beta = 0$ ,  $\beta \in \mathbb{R}$

Das afirmações:

- I. Se  $\beta < 0$ , então existem duas soluções reais distintas;  
II. Se  $\beta = -1$ , então existe apenas uma solução real;  
III. Se  $\beta = 0$ , então não existem soluções reais;  
IV. Se  $\beta > 0$ , então existem duas soluções reais distintas,

é (são) sempre verdadeira(s) apenas

- a) I.                      b) I e III.                      c) II e III.  
d) II e IV.                      e) I, III e IV.

**Solução: C**

Resolvendo a equação proposta no enunciado na variável  $a^x$ , tem-se:

$$a^{2x} + 2\beta a^x - \beta = 0$$

$$a^x = \frac{-2\beta \pm \sqrt{(2\beta)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-\beta)}}{2} = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 + \beta}$$

Então podemos julgar os itens propostos:

I. FALSA

Se  $\beta < 0$  mas  $-1 < \beta < 0$ , então  $\beta^2 + \beta < 0$  e não há solução real.

II. VERDADEIRA

Se  $\beta = -1$ , então  $a^x = 1$  e, portanto, há apenas uma solução real.

III. VERDADEIRA

Se  $\beta = 0$ , então  $a^x = 0$  e não há solução real.

IV. FALSA

Se  $\beta > 0$ , então  $-\beta + \sqrt{\beta^2 + \beta} > 0 \rightarrow a^x = k/k > 0 \rightarrow \exists$  solução real.

No entanto:  $-\beta - \sqrt{\beta^2 + \beta} < 0 \rightarrow a^x = p/p < 0 \rightarrow \nexists$  solução real.

**16.** Seja

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \left| \arcsen\left(\frac{e^{-x} - e^x}{2}\right) + \arccos\left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right) = \frac{\pi}{2} \right. \right\}.$$

Então,

- a)  $S = \emptyset$ .                      b)  $S = \{0\}$ .                      c)  $S = \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$ .  
d)  $S = \mathbb{R}^+$ .                      e)  $S = \mathbb{R}$ .

**Solução: B**

Sejam:

$$\alpha = \arcsen\left(\frac{e^{-x} - e^x}{2}\right); \quad \alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$$

$$\beta = \arccos\left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right); \quad \beta \in [0; \pi]$$

$$\alpha + \beta = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \beta = \alpha - \frac{\pi}{2}$$

Tem-se:

$$\text{sen}\alpha = \frac{e^{-x} - e^{-x}}{2}$$

$$\cos\beta = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{2}\right) = \text{sen}\alpha = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

Logo:

$$\frac{e^{-x} - e^x}{2} = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \Leftrightarrow 2e^{-x} = 2e^x \Leftrightarrow e^{-x} = e^x \Leftrightarrow x = 0$$

Conclusão:

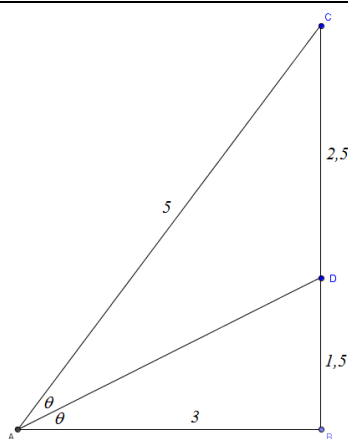
$$S = \{0\}$$

**17.** Seja  $x \in [0, 2\pi]$  tal que  $\text{sen}(x) \cos(x) = \frac{2}{5}$ . Então, o produto e a soma de todos os possíveis valores de  $\text{tg}(x)$  são, respectivamente

- a) 1 e 0.                      b) 1 e  $\frac{5}{2}$ .                      c) -1 e 0.  
d) 1 e 5.                      e) -1 e  $-\frac{5}{2}$ .

**Solução: B ou D**

Seja  $\theta$  um arco do primeiro quadrante tal como na figura (em escala) abaixo:



No triângulo ABC acima, clássico triângulo pitagórico de lados 3, 4 e 5, obtemos as medidas de BD e CD através do Teorema da Bissetriz Interna, ou seja, BD e CD são segmentos que somam 4 e são proporcionais a 3 e 5, respectivamente.

Temos, então: 
$$\tan \theta = \frac{1}{2} \quad (1)$$

Desenvolvendo a equação do enunciado, com base na identidade  $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$ , temos:

$$\begin{aligned} \sin x \cos x = \frac{2}{5} &\Rightarrow \sin 2x = \frac{4}{5} \Rightarrow \\ \Rightarrow \sin 2x = \sin 2\theta &\quad (2) \end{aligned}$$

Considerando  $k$  um número inteiro qualquer, a equação (2) nos leva a:

$$x = \theta + k\pi \quad \text{ou} \quad x = \frac{\pi}{2} - \theta + k\pi$$

Temos, pois, 4 soluções no intervalo  $x \in [0, 2\pi]$ , a saber:

$$\begin{aligned} x_1 &= \theta \\ x_2 &= \frac{\pi}{2} - \theta \\ x_3 &= \pi + \theta \\ x_4 &= \frac{3\pi}{2} - \theta \end{aligned}$$

Estes 4 valores possíveis de  $x$  nos levam a 2 valores distintos possíveis para a  $\tan x$ :

$$\begin{aligned} \tan x_1 = \tan x_3 = \tan \theta &= \frac{1}{2} \\ \tan x_2 = \tan x_4 = \cot \theta &= 2 \end{aligned}$$

O produto desses dois valores distintos é 1 e a soma deles é  $5/2$ , o que nos leva à alternativa B.

Agora, se considerarmos como "todos os valores possíveis de  $\tan x$ " a ocorrência de um valor de  $\tan x$  para cada  $x$  possível, teríamos 4 valores possíveis de  $\tan x$ , que teriam produto 1 e soma 5, ou seja, alternativa D.

O enunciado foi extremamente ambíguo e não há como saber qual das duas opções a banca tomará por correta.

**18.** A soma  $\sum_{k=0}^n \cos(\alpha + k\pi)$ , para todo  $a \in [0, 2\pi]$ ,

vale

- a)  $-\cos(\alpha)$  quando  $n$  é par.
- b)  $-\sin(\alpha)$  quando  $n$  é ímpar.
- c)  $\cos(\alpha)$  quando  $n$  é ímpar.
- d)  $\sin(\alpha)$  quando  $n$  é par.
- e) zero quando  $n$  é ímpar.

**Solução: E**

Expandindo o somatório:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \cos(\alpha + k\pi) &= \\ &= \cos(\alpha) + \cos(\alpha + \pi) + \cos(\alpha + 2\pi) + \cos(\alpha + 3\pi) + \dots \end{aligned}$$

Observe que:

$$\begin{aligned} \cos(\alpha + \pi) &= -\cos(\alpha) \\ \cos(\alpha + 3\pi) &= -\cos(\alpha + 2\pi) \\ \cos(\alpha + 5\pi) &= -\cos(\alpha + 4\pi) \dots \end{aligned}$$

Portanto:

Se  $n$  é ímpar:  $\sum_{k=0}^n \cos(\alpha + k\pi) = 0$

Se  $n$  é par:  $\sum_{k=0}^n \cos(\alpha + k\pi) = \cos(\alpha + n\pi) = \cos(\alpha)$

**19.** Um cone circular reto de altura 1cm e geratriz  $\frac{2\sqrt{3}}{3}$  cm é interceptado por um plano paralelo à sua base, sendo determinado, assim, um novo cone. Para que este novo cone tenha o mesmo volume de um cubo de aresta  $\left(\frac{\pi}{243}\right)^{1/3}$  cm, é necessário que a distância do plano à base do cone original seja, em cm, igual a:

- a)  $\frac{1}{4}$ . b)  $\frac{1}{3}$ . c)  $\frac{1}{2}$ . d)  $\frac{2}{3}$ . e)  $\frac{3}{4}$ .

**Solução: D**

No cone tem-se que  $r^2 + 1 = \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2 \Leftrightarrow r^2 = \frac{1}{3}$

$$\text{logo } V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{\pi}{9} \text{ cm}^3.$$

Sejam  $x$  a distância do plano à base do cone e  $V'$  o volume do novo cone assim formado então,

$$\frac{V'}{V} = \left(\frac{1-x}{1}\right)^3 \Leftrightarrow \frac{\left(\left(\frac{\pi}{243}\right)^{\frac{1}{3}}\right)^3}{\frac{\pi}{9}} = (1-x)^3 \Leftrightarrow \frac{1}{27} = (1-x)^3 \Leftrightarrow x = \frac{2}{3}$$

**20.** A superfície lateral de um cone circular reto é um setor circular de  $120^\circ$  e área igual a  $3\pi \text{ cm}^2$ . A área total e o volume deste cone medem, em  $\text{cm}^2$  e  $\text{cm}^3$ , respectivamente

- a)  $4\pi$  e  $\frac{2\pi\sqrt{2}}{3}$ . b)  $4\pi$  e  $\frac{\pi\sqrt{2}}{3}$ . c)  $4\pi$  e  $\pi\sqrt{2}$ .  
d)  $3\pi$  e  $\frac{2\pi\sqrt{2}}{3}$ . e)  $\pi$  e  $2\pi\sqrt{2}$ .

**Solução: A**

Sejam  $h$ ,  $g$  e  $r$ , respectivamente: a altura do cone, a geratriz do cone e o raio da base do cone.

$$\text{Segue que } g^2 = h^2 + r^2 \quad (1)$$

Da Área Lateral do cone, temos:

$$\pi r g = 3\pi$$

$$r g = 3 \quad (2)$$

Como o setor circular correspondente à Área Lateral é de  $120^\circ = \frac{2\pi}{3} \text{ rad}$ , temos:

$$\frac{2\pi}{3} = \frac{2\pi r}{g}$$

$$g = 3r \quad (3)$$

Das equações (2) e (3) obtemos:  $r=1$  e  $g=3$

Com o auxílio da equação (1) obtemos, pois:

$$h = 2\sqrt{2}$$

A área total e o volume, pedidos no enunciado, são:

$$A_T = \pi(3+r^2) \text{ e } V = \frac{\pi r^2 h}{3}$$

$$A_T = \pi(3+1^2) \text{ e } V = \frac{\pi 1^2 2\sqrt{2}}{3}$$

$$A_T = 4\pi \text{ e } V = \frac{2\pi\sqrt{2}}{3}$$

**21.** Dez cartões estão numerados de 1 a 10. Depois de embaralhados, são formados dois conjuntos de 5 cartões cada. Determine a probabilidade de que os números 9 e 10 apareçam num mesmo conjunto.

**Solução:**

1ª solução:

Feita a divisão o número 10 estará em um dos grupos, por exemplo, A. Nesse grupo A ainda estarão mais 4 números e no grupo B, 5 números. Ou seja, faltam 9 "vagas". A probabilidade do número 9 estar no grupo A será então de 4 em 9. Portanto:  $P = 4/9$ .

2ª solução:

Sejam os dois montes de 5 cartas nomeados de A e B. Os números 9 e 10, podem estar tanto em A quanto em B. Pensemos em uma das possibilidades:

	A		B
9	10x	x x	y y y y

Nesse caso, as possibilidades de escolhas para as cartas restantes de A, são:  $C_{8,3}$ .

Pensando que o total de possibilidades da divisão das 10 cartas em dois montes de 5, é:  $C_{10,5}$ .  $C_{5,5}$ ;

Então a probabilidade de 9 e 10 estarem em A, é:

$$P_{(9,10)-A} = C_{8,3} / C_{10,5} = (8.7)/(9.4.7) = 2/9$$

Considerando a possibilidade de ambos aparecerem também no grupo B, a resposta final é:  $2.(2/9) = 4/9$ .

**22.** Determine os valores reais de  $x$  de modo que  $\sin(2x) - \sqrt{3} \cos(2x)$  seja máximo.

**Solução:**

$$A = \sin 2x - \sqrt{3} \cos 2x$$

$$\Leftrightarrow \frac{A}{2} = \sin 2x \cdot \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \cos 2x$$

$$\Leftrightarrow A = 2 \left[ \sin 2x \cdot \cos \frac{\pi}{3} - \sin \frac{\pi}{3} \cdot \cos 2x \right]$$

$$\Leftrightarrow A = 2 \sin \left( 2x - \frac{\pi}{3} \right)$$

O valor de  $A$  é máximo quando  $\sin \left( 2x - \frac{\pi}{3} \right) = 1$  isto é,  $2x - \frac{\pi}{3} = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$  ou

$$x = k\pi + \frac{5\pi}{12}.$$

**23.** Considere a matriz quadrada  $A$  em que os termos da diagonal principal são  $1, 1+x_1, 1+x_2, \dots, 1+x_n$  e todos os outros termos são iguais a 1. Sabe-se que  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  é uma progressão geométrica cujo primeiro termo é  $\frac{1}{2}$  e a razão é 4. Determine a ordem da matriz  $A$  para que o seu determinante seja igual a 256.

**Solução:**

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1+x_1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1+x_2 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1+x_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & x_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & x_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x_n \end{vmatrix} = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \dots \cdot x_n$$

logo,

$$x_1 \cdot (x_1 q) \cdot (x_1 q^2) \cdot \dots \cdot (x_1 q^{n-1}) = 256$$

$$\Leftrightarrow (x_1)^n \cdot q^{\frac{n(n-1)}{2}} = 256$$

$$\Leftrightarrow \left( \frac{1}{2} \right)^n \cdot 4^{\frac{n(n-1)}{2}} = 256 \Leftrightarrow 2^{n^2-2n} = 2^8 \Leftrightarrow n = 4 \text{ ou } n = -2.$$

Disto segue-se que a matriz é de ordem 5.

**24.** Seja  $n$  um número natural. Sabendo que o determinante da matriz

$$A = \begin{bmatrix} n & \log_2 2 & -\log_2 \frac{1}{2} \\ n+5 & \log_3 3^n & \log_3 243 \\ -5 & \log_5 \frac{1}{125} & -\log_5 25 \end{bmatrix}$$

é igual a 9, determine  $n$  e também a soma dos elementos da primeira coluna da matriz inversa  $A^{-1}$ .

**Solução:**

Substituindo os respectivos logaritmos pelos seus valores, temos que

$$A = \begin{bmatrix} n & 1 & 1 \\ n+5 & n & 5 \\ -5 & -3 & -2 \end{bmatrix}$$

logo,  $\det A = 9 \Leftrightarrow -2n^2 - 19n + 39 = 0 \Leftrightarrow n = 3$  ou  $n = \frac{13}{2}$  e como  $n \in \mathbb{N}$ , então  $n = 3$ . Como os elementos da 1ª coluna de  $A^{-1}$  são os cofatores da 1ª linha de  $A$  divididos por  $\det A$  e assim

$$S = \frac{C_{11} + C_{12} + C_{13}}{9} = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -3 & -2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 8 & 5 \\ -5 & -2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 8 & 3 \\ -5 & -3 \end{vmatrix}}{9} = \frac{9 - 9 - 9}{9} = -1$$

**25.** Em um plano estão situados uma circunferência  $\omega$  de raio 2cm e um ponto  $P$  que dista  $2\sqrt{2}$  cm do centro de  $\overline{PA}$  e  $\overline{PB}$  tangentes a  $\omega$  nos pontos  $A$  e  $B$ , respectivamente. Ao girar a região fechada delimitada pelos segmentos  $\overline{PA}$  e  $\overline{PB}$  e pelo arco menor  $\widehat{AB}$  em torno de um eixo passando pelo centro de  $\omega$  é perpendicular ao segmento  $\overline{PA}$ , obtém-se um sólido de revolução. Determine:

- A área total da superfície do sólido.
- O volume do sólido.

**Solução:**

$$S_T = S_{\text{base cilindro}} + S_{\text{lateral do cilindro}} + S_{\text{semiesfera}} = \pi \cdot 2^2 + 2\pi \cdot 2 \cdot 2 + 2\pi \cdot 2^2 = 20\pi \text{ cm}^2$$

$$V = V_{\text{cilindro}} - V_{\text{semiesfera}} = \pi \cdot 2^2 \cdot 2 - \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 2^3 = \frac{8\pi}{3} \text{ cm}^3$$

**26.** As intersecções das retas  $r: x-3y+3=0$ ,  $s: x+2y-7=0$  e  $t: x+7y-7=0$ , duas a duas, respectivamente, definem os vértices de um triângulo que é a base de um prisma reto de altura igual a 2 unidades de comprimento. Determine:

- a) A área total da superfície do prisma.  
b) O volume do prisma.

**Solução:**

Sejam  $A = r \cap s = (3, 2)$ ,  $B = r \cap t = (0, 1)$  e  $C = s \cap t = (7, 0)$ . Então

$$S_{\text{base}} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 3 & 0 & 7 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} |3 + 14 - 7| = 5 \text{ u.a. e}$$

$$(2p)_{\text{base}} = AB + AC + BC = (\sqrt{10} + \sqrt{20} + \sqrt{50}) \text{ u.c.}$$

daí,

$$S_{\text{Total}} = 2 \cdot S_{\text{base}} + S_{\text{lateral}} = 2 \cdot 5 + 2\sqrt{10} + 2\sqrt{20} + 2\sqrt{50} = (10 + 2\sqrt{10} + 4\sqrt{5} + 10\sqrt{2}) \text{ u.a.}$$

$$V = S_{\text{base}} \cdot \text{altura} = 5 \cdot 2 = 10 \text{ u.v.}$$

**27.** Dos  $n$  alunos de um colégio, cada um estuda pelo menos uma das três matérias: Matemática, Física e Química. Sabe-se que 48% dos alunos estudam Matemática, 32% estudam Química e 36% estudam Física. Sabe-se, ainda, que 8% dos alunos estudam apenas Física e Matemática, enquanto 4% estudam todas as três matérias. Os alunos que estudam apenas Química e Física mais aqueles que estudam apenas Matemática e Química totalizam 63 estudantes. Determine  $n$ .

**Solução:**

Do enunciado:

(M) = Matemática: 48% de  $n = 0,48n$

(F) = Física: 36% de  $n = 0,36n$

(Q) = Química: 32% de  $n = 0,32n$

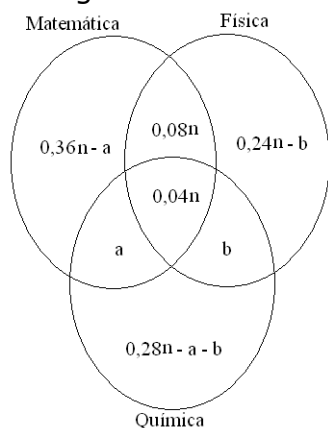
$(M \cap F \cap Q) = 0,04n$

$(M \cap F) - (M \cap F \cap Q) = 0,08n$

$(F \cap Q) - (M \cap F \cap Q) = b$

$(Q \cap M) - (M \cap F \cap Q) = a$

E o digrama de Venn fica:



Sabendo-se

$a + b = 63$  (i);

$$(0,36n - a) + (0,08n) + (0,04n) + (0,24n - b) + (a) + (b) + (0,28n - a - b) = n \text{ (ii)}$$

Tem-se:

$$n - a - b = n$$

$$a + b = 0 : \text{IMPOSSÍVEL, pois contradiz (i).}$$

Logo, não existe  $n$  que satisfaça a condição do problema.

**28.** Analise se  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 3 + x^2, & x \geq 0 \\ 3 - x^2, & x < 0 \end{cases}$  é bijetora e, em caso afirmativo, encontre  $f^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .

**Solução:**

Seja  $\{a, b\} \subset D(f) = \mathbb{R}$ , onde  $D(f)$  denota o domínio da função  $f$ .

(1º caso)

Se  $a \geq 0, b \geq 0$  e  $a^2 \neq b^2 \rightarrow 3 + a^2 \neq 3 + b^2 \rightarrow f(a) \neq f(b)$ .

(2º caso)

Se  $a < 0, b < 0$  e  $a \neq b$  então,  $a^2 \neq b^2 \rightarrow 3 - a^2 \neq 3 - b^2 \rightarrow f(a) \neq f(b)$ .

(3º caso)

Se  $a \geq 0$  e  $b < 0$  então,  $f(a) - f(b) = a^2 + b^2 \neq 0 \rightarrow f(a) \neq f(b)$ .

(4º caso)

Análogo ao caso anterior.

Desta forma a função é injetora.

Vejamos a sobrejetividade da função.

Seja  $y_0 \geq 3$ , tome  $x_0 = \sqrt{y_0 - 3} \geq 0$  e então  $f(x_0) = 3 + x_0^2 = y_0$

Seja  $y_0 < 3$ , tome  $x_0 = -\sqrt{3 - y_0} < 0$  e então  $f(x_0) = 3 - x_0^2 = y_0$ .

Portanto, a imagem de  $f$  é o conjunto  $\mathbb{R}$  e assim  $f$  é sobrejetora.

A expressão da inversa foi conseguida na verificação da sobrejetividade, ou seja,

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} \sqrt{x - 3}, & x \geq 3 \\ -\sqrt{3 - x}, & x < 3 \end{cases}$$

**29.** Determine os valores de  $\theta \in [0, 2\pi]$  tais que

$$\log_{\text{tg}(\theta)} e^{\text{sen}(\theta)} \geq 0.$$

**Solução:**

Condições de existência:

$$\text{tg} \theta > 0 \text{ e}$$

$$\text{tg} \theta \neq 1 \Leftrightarrow 0 < \theta < \frac{\pi}{4} \text{ ou } \frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{2} \text{ ou } \pi < \theta < \frac{5\pi}{4} \text{ ou } \frac{5\pi}{4} < \theta < \frac{3\pi}{2}$$

De acordo com a primeira e a terceira hipóteses tem-se que  $0 < \text{tg} \theta < 1$  e nestes casos temos

$$\log_{\text{tg}\theta} e^{\text{sen}\theta} \geq 0 \Leftrightarrow e^{\text{sen}\theta} \leq 1 \Leftrightarrow \text{sen}\theta \leq 0 \Leftrightarrow \pi < \theta < \frac{5\pi}{4}$$

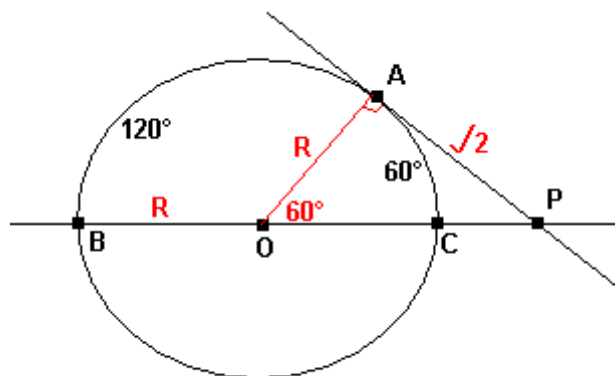
De acordo com a segunda e a quarta hipóteses tem-se que  $\text{tg}\theta > 1$  e nestes casos temos

$$\log_{\text{tg}\theta} e^{\text{sen}\theta} \geq 0 \Leftrightarrow e^{\text{sen}\theta} \geq 1 \Leftrightarrow \text{sen}\theta \geq 0 \Leftrightarrow \frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{2}$$

$$\text{daí, } S = \left] \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2} \right[ \cup \left] \pi, \frac{5\pi}{4} \right[.$$

**30.** As retas  $r_1$  e  $r_2$  são concorrentes no ponto  $P$ , exterior a um círculo  $\omega$ . A reta  $r_1$  tangencia  $\omega$  no ponto  $A$  e a reta  $r_2$  intercepta  $\omega$  nos pontos  $B$  e  $C$  diametralmente opostos. A medida do arco  $\widehat{AC}$  é  $60^\circ$  e  $\overline{PA}$  mede  $\sqrt{2}$  cm. Determine a área do setor menos de  $\omega$  definido pelo arco  $\widehat{AB}$ .

**Solução:**



Do triângulo OAP temos

$$\text{tg}(60^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{R}$$

$$R = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

A área do setor será  $1/3$  da área da circunferência.

$$A = \frac{\pi R^2}{3}$$

$$A = \frac{4\pi}{9}$$